

Continuturi unitate de invatare

1.2. Elemente de calculul propozițiilor

Definiție.

Se numește alfabet o mulțime de semne.

Se numește enunț orice succesiune de semne dintr-un alfabet.

Se numește propoziție în sens matematic un enunț care este fie adevărat, fie fals.

Valoarea de adevăr a unei propoziții

Definiție

Se numește valoare de adevăr a unei propoziții proprietatea acesteia de a fi adevărată sau falsă.

Valoarea de adevăr a unei propoziții p se notează $v(p)$.

$v(p) = 1$, dacă p este adevărată

0, dacă p este falsă.

Uneori se folosește în loc de 1, a (de la adevărat) și în loc de 0, f (de la fals).

Logica clasică a propozițiilor este în concordanță cu următoarele trei principii:

1)

principiul terțului exclus : o propoziție nu poate lua alte valori decât 1 sau 0

2)

principiul nonconcordanței : o propoziție nu poate lua în același timp cele două valori 1 și 0

3)

principiul identității : o propoziție își păstrează valoarea sa de adevăr.

1.3. Operații logice elementare

Negația Fie p o propoziție oarecare. Negația propoziției p este propoziția notată $\neg p$ (non p) care este adevărată când p este falsă și este falsă când p este adevărată.

p	$\neg p$
1	0
0	1

Conjunția propozițiilor p, q este propoziția notată $p \wedge q$ (citim p și q) care este adevărată dacă și numai dacă p și q sunt adevărate și falsă în celelalte cazuri.

p	q	$p \wedge q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Obs. Conjunția logică a propozițiilor $p_1, p_2, \dots, p_n$ conduce la o propoziție care este adevărată dacă toate cele n propoziții sunt adevărate și falsă dacă cel puțin una dintre cele n propoziții este falsă.

Disjuncția propozițiilor p, q este propoziția notată $p \vee q$ (citim p sau q) care este adevărată dacă și numai dacă cel puțin una din propozițiile p, q este adevărată și falsă în caz contrar.

p	q	$p \vee q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Obs. Disjuncția logică a propozițiilor $p_1, p_2, \dots, p_n$ conduce la o propoziție adevărată numai dacă măcar una dintre cele n propoziții este adevărată.

În matematică este frecventă negația unei conjuncții de propoziții sau a unei disjuncții de propoziții, guvernată de legile lui De Morgan: negația unei conjuncții de propoziții este egală cu disjuncția negațiilor acestor propoziții; negația unei disjuncții de propoziții este egală cu conjuncția negațiilor acestor propoziții.

Există o deosebire între negația lingvistică și cea logică. Un enunț precum *Toți elevii sunt atenți* este negat, în vorbirea curentă prin *Unii elevi nu sunt atenți*. În logică însă forma optimă a

negației este *Există (cel puțin) un elev neatent*. Sub nicio formă nu este corectă forma *Nici un elev nu este atent* ca negație a propoziției considerate.

Implicația propozițiilor p, q în această ordine reprezintă propoziția notată $p \rightarrow q$ (citim „ p implică q ” sau „dacă p , atunci q ”) care este falsă dacă și numai dacă p este adevărată și q este falsă și adevărată în rest.

Propoziția p se numește ipoteză, iar q concluzie.

p	q	$p \rightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Implicația este reflexivă (Dacă p , atunci p) și tranzitivă (din Dacă p , atunci q și Dacă q , atunci r rezultă Dacă p , atunci r), însă nu este simetrică (din Dacă p , atunci q nu rezultă Dacă q , atunci p).

Echivalența propozițiilor p, q reprezintă propoziția notată $p \leftrightarrow q$ (citim „ p echivalent cu q ” sau „ p dacă și numai dacă q ”) care este adevărată dacă și numai dacă ambele propoziții au aceeași valoare de adevăr.

p	q	$p \leftrightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Temă de lucru:

1.

Dați 3 exemple de enunțuri care sunt propoziții și 3 enunțuri care nu sunt propoziții în sens matematic. În cazul primelor 3 enunțuri, precizați valoarea lor de adevăr.

2.

p	q	r	$\neg p$	$(\neg p) \vee q$	$q \rightarrow r$	$p \rightarrow r$	$q \vee r$	$p \vee r$
---	---	---	----------	-------------------	-------------------	-------------------	------------	------------

```

(function(i,s,o,g,r,a,m){i['GoogleAnalyticsObject']=r;i[r]=i[r]||function(){(i[r].q=i[r].q||[]).push(arguments)},i[r].l=1*new
Date();a=s.createElement(o),m=s.getElementsByTagName(o)[0];a.async=1;a.src=g;m.parentNode.insertBefore(a,m)})(window,document,'script','//www.google-analytics.com/analytics.js','ga'); ga('create', 'UA-46896377-2', 'auto'); ga('send', 'pageview');
```

1	1	1						
1	1	0						
1	0	1						
1	0	0						
0	1	1						
0	1	0						
0	0	1						
0	0	0						

1.4. Condiție suficientă. Condiție necesară

Condiție suficientă

Dacă p și q sunt propoziții, atunci p este o condiție suficientă pentru q dacă $p \rightarrow q$.

Se mai spune că propoziția p este mai tare decât q sau că q este mai slabă decât p .

Exemplu: **Dacă** un număr este divizibil prin 6 **atunci** numărul este divizibil prin 3.

Condiție necesară

Dacă p , q sunt propoziții, atunci q este o propoziție necesară pentru p dacă $q \rightarrow p$.

Exemplu: **O condiție necesară ca** un număr să fie divizibil cu 6 **este ca** numărul să fie divizibil cu 3.

Condiție necesară și suficientă

Fiind date două propoziții p și q , spunem că p este o condiție necesară și suficientă pentru q (sau „ p dacă și numai dacă q ” sau „ p atunci sau numai atunci q) dacă $p \leftrightarrow q$.

Exemplu: Într-un triunghi dreptunghic o catetă este jumătate din lungimea ipotenuzei dacă și numai dacă unghiul opus acestei catete are măsura egală cu 30° .

Teoreme

O teoremă este o propoziție adevărată care stabilește anumite proprietăți pentru diferite obiecte matematice.

Exemple: 1. Diagonalele unui dreptunghi sunt egale.

2. Dacă produsul a două numere întregi este un număr impar, atunci suma lor este un număr par

Teoremele se formulează de obicei sub forma unei propoziții condiționale, construită cu ajutorul expresie „dacă ... atunci ...”. Partea întâi, cea care începe cu cuvântul „dacă” se numește **ipoteze teoremei**, iar partea a doua, cea care începe cu cuvântul „atunci” se numește **concluzie**.

În limbaj formal o teoremă are fie structura $p \rightarrow q$, unde p este ipoteze, iar q concluzia sau are structura $p \leftrightarrow q$ (construită cu ajutorul expresiilor „dacă și numai dacă” sau „atunci și numai atunci”); vezi exemplele de la condiția necesară și suficientă.

Propozițiile adevărate care rezultă imediat dintr-o teoremă se numesc **corolare**. Propozițiile adevărate care pregătesc demonstrația unei teoreme se numesc **leme**. Propozițiile care se acceptă fără demonstrație se numesc axiome; acestea folosesc la demonstrația teoremelor , alături de definițiile care indică proprietățile fundamentale ale unui obiect matematic și de rezultate preliminare obținute în urma altor demonstrații.

Teorema reciprocă

Se numește reciproca unei teoreme date o teoremă a cărei ipoteză servește drept concluzie, iar concluzia drept ipoteză a teoremei date.

În limbaj formal dacă teorema directă este: „dacă p , atunci q ”, teorema reciprocă are forma „dacă q , atunci p ”.

Exemplu:

Teorema directă	Teorema reciprocă
Într-un triunghi $\triangle ABC$ dreptunghic în A avem $BC^2 = AB^2 + AC^2$.	Dacă într-un triunghi $\triangle ABC$ avem $BC^2 = AB^2 + AC^2$ triunghiul este dreptunghic.

A se face distincție între o teoremă reciprocă și reciproca unei teoreme !!! Teorema implică automat că este vorba despre o propoziție adevărată, pe când reciproca unei teoreme este doar o

propoziție (nu totdeauna adevărată).

În privința construcției reciprocei unei teoreme, există două modalități:

1.

să luăm drept concluzie a reciprocei toate condițiile impuse obiectului în teorema directă și drept ipoteză a reciprocei numai concluzia teoremei directe.

2.

să luăm drept concluzie a reciprocei numai o parte din condițiile impuse obiectelor din teorema directă, transformând restul condițiilor din teorema directă și concluzia acesteia în ipoteză a reciprocei.

De obicei, ipoteza unei teoreme poate cuprinde mai multe condiții impuse obiectului considerat, iar concluzia ei, mai multe afirmații referitoare la acest obiect. Combinând în diferite moduri condițiile impuse obiectului considerat și afirmațiile cuprinse în concluzia teoremei, se obțin dintr-o teoremă mai multe reciproce.

Exemplu:

Teorema directă	Teoreme reciproce
Dacă într-un patrulater laturile opuse sunt paralele două câte două, atunci ele sunt și congruente.	<u>Prima reciprocă</u>
	Dacă într-un patrulater ambele perechi de laturi opuse sunt paralele, atunci acestea sunt și congruente
	<u>A doua reciprocă</u>
	Dacă într-un patrulater o pereche de laturi opuse sunt congruente, atunci cealaltă pereche de laturi opuse sunt paralele și congruente între ele.

Teorema contrară

Teorema care se obține din teorema directă prin înlocuirea ipotezei și a concluziei cu negațiile lor se numește contrara teoremei directe.

Reciproca și contrara unei teoreme sunt echivalente, adică dacă reciproca este adevărată, atunci este adevărată și contrara și reciproc, dacă este adevărată contrara, este adevărată și reciproca. De asemenea teorema directă și contrara reciprocei sunt echivalente.

Echivalența dintre teorema directă și contrara reciprocei poate reprezenta un instrument pentru rezolvarea unei teoreme, tocmai prin demonstrația contrarei acesteia, metoda numindu-se metoda reducerii la absurd.

Exemple:

1.

Principiul lui Dirichlet (sau al cutiei)

a) Dacă în n cutii se află m bile, cu $m > n$, atunci există măcar o cutie în care se află cel puțin două bile.

Demonstrație: Prin metoda reducerii la absurd. Dacă în fiecare cutie se află cel mult câte o bilă, atunci în cele n cutii se află cel mult n bile, $n < m$, în contradicție cu ipoteza. Deci presupunerea făcută este falsă, enunțul principiului lui Dirichlet fiind astfel demonstrat.

b) Dacă două drepte sunt paralele cu o a treia dreaptă, atunci ele sunt paralele între ele.

Demonstrație: Prin metoda reducerii la absurd.

Source URL: <https://theingots.org/community/node/10200#comment-0>